Дата публикации: 01.06.2023
DOI: 10.24412/2588-0500-2023_07_02_37
УДК 612.799.1

Publication date: 01.06.2023
DOI: 10.24412/2588-0500-2023_07_02_37
UDC 612.799.1

АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВОЛОС ЧЕЛОВЕКА С ПОМОЩЬЮ ГИПЕРУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ МУНИ-РИВЛИНА

С.А. Муслов[1], С.Д. Арутюнов[1], С.С. Перцов[1,2], К.Г. Караков[3]
[1]Московский государственный медико-стоматологический университет имени А.И. Евдокимова, г. Москва, Россия
[2]ФГБНУ «НИИ нормальной физиологии им. П.К. Анохина», г. Москва, Россия
[3]ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный медицинский университет» Минздрава России, г. Ставрополь, Россия

Аннотация. Рассмотрены 2-, 3-, 5- и 9-параметрические гиперупругие модели Муни-Ривлина волос человека и определены их параметры. Наименьший коэффициент корреляции с опытными данными продемонстрировала 2-параметрическая модель (0,974), наибольший – 9-параметрическая (0,999). Начальный модуль Юнга 9-параметрической модели составил E_0=2,84 ГПа, что по порядку величины совпадает с эмпирическими литературными данными. Результаты расчетов, полученные в системе компьютерной алгебры Mathcad, существенно отличаются от полученных с помощью комплекса ANSYS, что, очевидно, связано с различными алгоритмами вычислений, используемыми программами. При вводе данных в ПК ANSYS применяли как инженерные напряжения и деформации, так и истинные значения. Устойчивость моделей оценивали с помощью критерия Хилла и Друкера. Было установлено, что определенные ограничения на параметры моделей C_{ij} Муни-Ривлина не выполняются, что было подтверждено анализом кривых σ-λ.
Ключевые слова: волос, напряжения, деформации, гиперупругие модели, модель Муни-Ривлина, модуль упругости.

ANALYSIS OF MECHANICAL PROPERTIES OF HUMAN HAIR USING HYPERELASTIC MOONEY-RIVLIN MODELS

S.A. Muslov[1], S.D. Arutyunov[1], S.S. Pertsov[1,2], K.G. Karakov[3]
[1]Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, Russia
[2]Research Institute of Normal Physiology named after P.K. Anokhin, Moscow, Russia
[3]Stavropol State Medical University, Stavropol, Russia

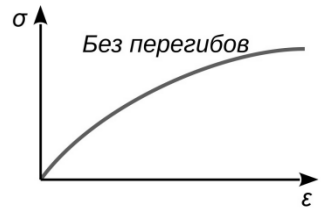
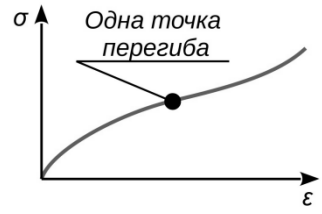
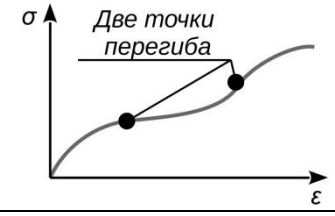
Annotation. We have examined 2, 3, 5 and 9 parameter hyperelastic Muni-Rivlin models of human hair and identified their parameters. The lowest correlation coefficient with experimental data was demonstrated by the 2 parameter model (0.974), the highest – by the 9 parameter model (0.999). The initial Young's modulus of the 9 parameter model was E_0=2.84 GPa, which coincides with the empirical literature data in order of magnitude. The calculation results obtained in the Mathcad system differ significantly from those obtained using the ANSYS software, which is obviously due to the different calculation algorithms used by the programs. When entering data into the ANSYS PC, both engineering stresses, deformations and true values were applied. The stability of the models was evaluated using the Hill and Drucker stability criterion. It was found that certain restrictions on the parameters of the Mooney-Rivlin C_{ij} models are not met, which was confirmed by the analysis of the σ-λ curves.
Keywords: hair, stresses, deformations, hyperelastic models, Mooney-Rivlin model, modulus of elasticity.

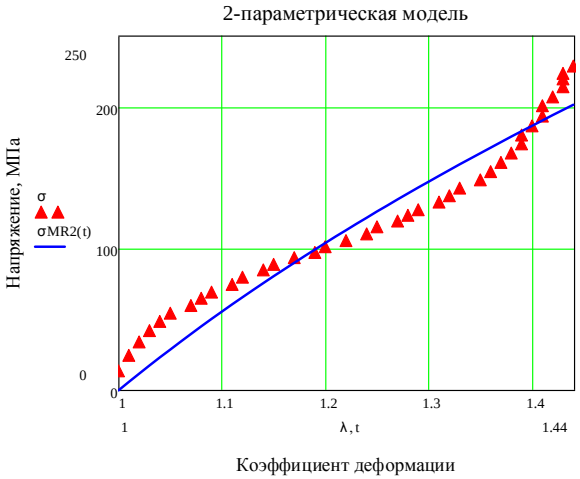
Введение. Волосы – важная часть нашего тела – не только имеют эстетическое значение в нашей культуре, но и обеспечивают защиту. Этот армированный волокном нанокомпозит играет ключевую роль в качестве внешнего покрытия у многих позвоночных. По своему строению волосы – придатки кожи, производные из

эпидермиса, представляющие собой многослойные нитеобразные структуры из эпителиальных клеток (кератиноциты, меланоциты), ороговевающих по мере удаления из точки роста в волосяных фолликулах [1]. На голове человека около 150 тысяч волос, основной компонент волос – кератин. Здоровый волос весьма эластичен, в сухом состоянии может вытянуться на 20-30% от своей длины, а в мокром – более чем на 50% и затем вернуться в исходное состояние. Волокна человеческого волоса испытывают силы растяжения, когда за ними ухаживают и укладывают. Следовательно, поведение волос при натяжении представляет интерес для исследователей. Кроме того, эти знания могут быть полезны при алопеции для трансплантации и наращивании волос, изготовителям искусственных волос, в криминалистике, анимации и т.д. Но в отличие от механических свойств кожи лица и тела человека, которые достаточно хорошо изучены (в зависимости от анатомического расположения, ориентации образцов относительно линий Лангера, возраста и пола, а также здоровья пациентов и даже косметических процедур), упругие и прочностные свойства волос исследованы недостаточно, и совсем нет данных о гиперупругих моделях данной биологической ткани. Как известно, к уникальным свойствам гиперупругих (резиноподобных) материалов относятся: способность подвергаться большим деформациям под нагрузкой, выдерживая деформации до 500% в технических приложениях; выраженное нелинейное поведение при нагрузке-растяжении; ответ на нагрузку почти без изменения объема. В связи с этим весьма актуально исследование гиперупругих характеристик волос человека с помощью существующих моделей.

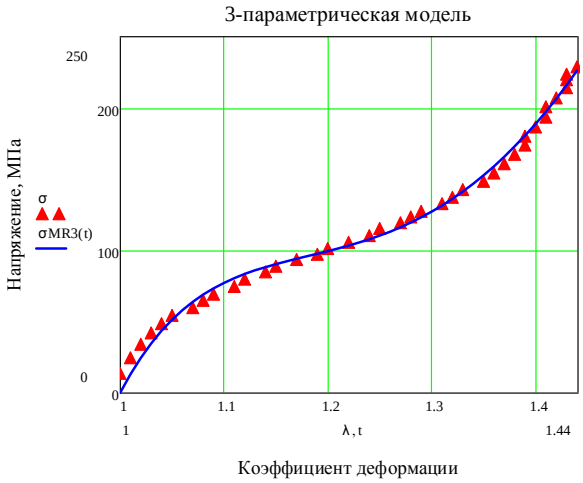
Таблица 1

Тип кривой нагружения и модели Муни-Ривлина [10]

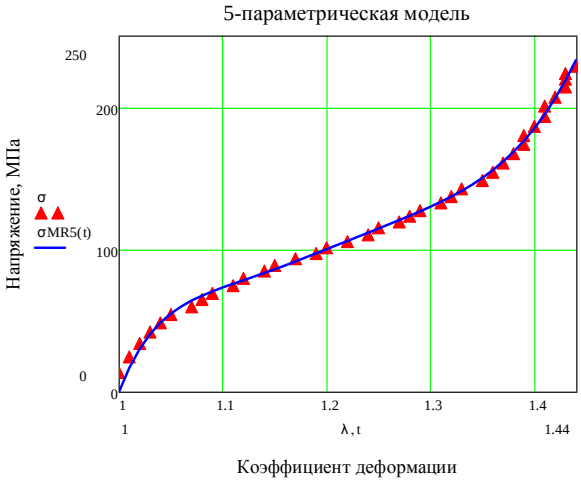
№	Тип кривой «напряжение-деформация»	Рекомендуемый тип модели Муни-Ривлина
1.		2-параметрическая или 3-параметрическая модель
2.		3-параметрическая или 5-параметрическая модель
3.		5-параметрическая или 9-параметрическая модель; недостаток: модели требуют большего количества констант, описывающих материал



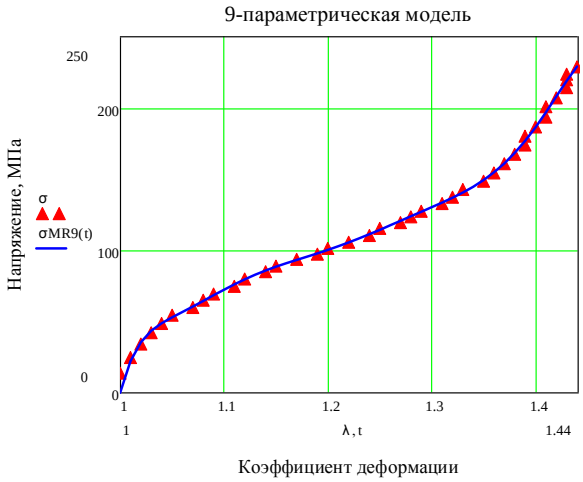
А) SD=15,742, δ=8,233%, R=0,974, E_0= 599,89 МПа



Б) SD=4,994, δ=2,915%, R=0,997, E_0=1,39 ГПа



В) SD = 3,37, δ = 2,005%, R = 0,9985, E_0 = 1,92 ГПа



Г) SD = 2,857, δ =2,065%, R = 0,99889, E_0 = 2,84 ГПа

Рис. 1. Сравнение эмпирических и расчетных данных 2- (А), 3- (Б), 5- (В) и 9- (Г) параметрических моделей Муни-Ривлина

Примечание: SD – стандартное отклонение (standard deviation); δ – максимальная приведенная погрешность; R – коэффициент корреляции; E_0 – начальный модуль Юнга

Мы располагали экспериментальными кривыми «напряжение-деформация», полученными при одноосных испытаниях волос пациентов в возрасте от 20 до 29 лет [2]. Их вид существенно отличается от «обычных» J-кривых, присущих для большинства мягких тканей [3-5] в том числе и кожи [6]. Исследовали волосы головы, подмышечные и лобковые. Измеряли максимальное напряжение (кГ/мм^2) и удлинение (%) образцов волос мужчин и женщин, из США и Японии, подвергнутых радиации и нет, сразу после удаления, через 6 и 12 месяцев. Из других данных можно отметить работу [7], но в ней авторы, проведя детальное исследование оптическими методами, ограничились только определением начального упругого модуля и коэффициента Пуассона волос (3,727 ГПа и 0,377 соответственно) в проксимальной, средней и дистальной их части. Весьма информативны обзор исследований структуры и механики шерсти и волосяных волокон животных [8], а также экспериментально-расчетное исследование волос человека [9], где установлено, что начальный модуль Юнга равен 4,2 ГПа, а

устанавливающее уравнение деформации растяжения кератинового волокна имеет вид:

$\sigma(\varepsilon) = E_1\varepsilon + E_2(\varepsilon-\varepsilon_{c1})H(\varepsilon_{c1}) + E_3(\varepsilon-\varepsilon_{c2})H(\varepsilon_{c2})$,

где E_1, E_2, E_3 – упругие модули диапазона упругой деформации, диапазона структурного α-β перехода и постпереходного периода соответственно, ε_{c1} = 0,02, ε_{c2} = ~0,25, H =1/2(1 + sgn x) – функция Хэвисайда.

Чтобы выбрать подходящую модель, мы использовали несколько моделей Муни-Ривлина: 2-, 3-, 5- и 9-параметрическую, получивших распространение в механике больших деформаций и доступных в литературе. Действительно, выбор определяющих соотношений и адекватных гиперупругих моделей является актуальной задачей современной механики. Несмотря на то, что в нашем случае исходная эмпирическая кривая σ-ε имела одну точку перегиба (табл. 1, рис. 1), мы подвергли тестированию все существующие модели Муни-Ривлина.

Методы и организация исследования. Определение и исследование параметров гиперупругих моделей производили в системе компьютерной алгебры Mathcad 13.0 и многоцелевом программном комплексе (ПК) ANSYS 2022 R2. В пакете Mathcad применяли встроенные функции *linfit*, при расчете корреляции моделей – функцию *corr*. При вводе данных в ПК ANSYS использовали инженерные (условные) и истинные (Коши) напряжения и деформации. Как известно,

$$\sigma_{ист} = \sigma_{инж}\lambda,\ \varepsilon_{ист} = \ln(1+\varepsilon_{инж}),\ \lambda = \varepsilon + 1,$$

где λ – коэффициент деформации, ε – относительная деформация соответственно. При малых деформациях значения инженерных и истинных параметров почти идентичны. Ошибку аппроксимации вычисляли с помощью опции *Normalized error* ANSYS. Использовали расчетные формулы, приведенные в [10].

Модель Муни-Ривлина является дальнейшим развитием неогуковской модели и одной из самых популярных среди всех гиперупругих моделей. Она была предложена М. Муни в 1940 году и выражена в терминах инвариантов Р. Ривлином в 1948 году. Чтобы описать поведение материала, модель Муни-Ривлина как функция инвариантов деформации с различными 2, 3, 5 или 9 параметрами, доступна в литературе, и подходящую модель можно выбрать в зависимости от типа кривой напряжения-деформации, как показано в таблице 1.

В 2-параметрической модели Муни-Ривлина функция плотности энергии деформированного несжимаемого материала (I_3=1), каким предполагаются мягкие биологические ткани, определяется в виде линейной комбинации двух инвариантов правого тензора деформации Коши-Грина:

$$W_{2p} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3), \qquad (1)$$

где I_1 и I_2 – первый и второй инварианты тензора, равные $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}$ соответственно, $\lambda_i = \varepsilon_i + 1$ – главные компоненты, ε_i – главные относительные деформации (i = 1, 2, 3), а две материальные константы C_{10} и C_{01} имеют размерность напряжений (упругих модулей) и могут оцениваться по результатам испытаний. При этом начальный модуль сдвига для моделей Муни-Ривлина $\mu_0 = 2(C_{10} + C_{01})$.

В 3-параметрической модели:

$$W_{3p} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 1)(I_2 - 1), \qquad (2)$$

в 5-параметрической:

$$W_{5p} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 1)(I_2 - 1), \qquad (3)$$

в 9-параметрической:

$$W_{9p} = C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{20}(I_1-3)^2+C_{02}(I_2-3)^2+C_{11}(I_1-1)(I_2-1)+ \\ +C_{21}(I_1-1)^2(I_2-1)+C_{12}(I_1-1)(I_2-1)^2+C_{30}(I_1-3)^3+C_{03}(I_2-3)^3. \quad (4)$$

Соответствующие выражения для одноосных условных напряжений имеют вид:

- для 2-параметрической модели:

$$\sigma_{2p} = 2(C_{10}-\frac{C_{01}}{\lambda})(\lambda-\frac{1}{\lambda^2}) = 2C_{10}(\lambda-\frac{1}{\lambda^2})+2C_{01}(1-\frac{1}{\lambda^3}), \quad (5)$$

- для 3-параметрической:

$$\sigma_{3p} = 2C_{10}(\lambda-\frac{1}{\lambda^2})+2C_{01}(1-\frac{1}{\lambda^3})+6C_{11}(\lambda^2-\lambda-1+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}-\frac{1}{\lambda^4}), \quad (6)$$

- для 5-параметрической:

$$\sigma_{5p} = 2C_{10}(\lambda-\frac{1}{\lambda^2})+2C_{01}(1-\frac{1}{\lambda^3})+6C_{11}(\lambda^2-\lambda-1+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}-\frac{1}{\lambda^4})+ \\ +4C_{20}\lambda(1-\frac{1}{\lambda^3})(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3)+4C_{02}(2\lambda+\frac{1}{\lambda^2}-3)(1-\frac{1}{\lambda^3}), \quad (7)$$

- для 9-параметрической:

$$\sigma_{9p} = 2C_{10}(\lambda-\frac{1}{\lambda^2})+2C_{01}(1-\frac{1}{\lambda^3})+6C_{11}(\lambda^2-\lambda-1+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}-\frac{1}{\lambda^4})+ \\ +4C_{20}\lambda(1-\frac{1}{\lambda^3})(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3)+4C_{02}(2\lambda+\frac{1}{\lambda^2}-3)(1-\frac{1}{\lambda^3})+ \\ +2C_{21}(1-\frac{1}{\lambda^3})(2\lambda+\frac{1}{\lambda^2}-3)(2\lambda^3-4\lambda+\frac{1}{\lambda^2}+1)+ \\ +2C_{12}(1-\frac{1}{\lambda^3})(2\lambda+\frac{1}{\lambda^2}-3)(4\lambda^2-\frac{5}{\lambda}-3\lambda-6)+6C_{30}(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3)^2(\lambda-\frac{1}{\lambda^2})+ \\ +6C_{03}(2\lambda+\frac{1}{\lambda^2}-3)^2(1-\frac{1}{\lambda^3}). \quad (8)$$

Для простоты анализа чаще всего применяется двухпараметрическая модель.

Результаты исследования и их обсуждение. Эмпирическая (треугольниками) и модельные кривые, построенные на основании формул (5-8), представлены в рисунке 1, численные значения параметров моделей – в таблице 2.

Таблица 2

Численные значения параметров моделей Муни-Ривлина, МПа

Порядок модели	C_{10}	C_{01}	C_{11}	C_{20}	C_{02}	C_{21}	C_{12}	C_{30}	C_{03}
2-парам.	117	-17,1							
3-парам.	$-9{,}87\cdot10^2$	$1{,}22\cdot10^3$	$3{,}78\cdot10^2$						
5-парам.	$-3.26\cdot10^3$	$3{,}58\cdot10^3$	$-3{,}40\cdot10^4$	$1{,}24\cdot10^4$	$2{,}52\cdot10^4$				
9-парам.	$-1{,}12\cdot10^4$	$1{,}17\cdot10^4$	$4{,}30\cdot10^8$	$-7{,}81\cdot10^7$	$-5{,}80\cdot10^8$	$4{,}54\cdot10^7$	$-4{,}56\cdot10^7$	$-6{,}94\cdot10^6$	$-2{,}84\cdot10^7$

Примечание: C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{02}, C_{21}, C_{12}, C_{30}, C_{03} – материальные константы гиперупругих моделей Муни-Ривлина

Из полученных данных следует, что 2-параметрической модели Муни-Ривлина соответствует наибольшее стандартное отклонение от опытных данных (15,74) и максимальная приведенная погрешность (8,23%), при этом коэффициент корреляции – наименьший среди всех рассмотренных моделей (0,97). Наименьшее стандартное отклонение от экспериментальных данных (2,85) и минимальную приведенную

погрешность (2,06%) продемонстрировала 9-параметрическая модель, при этом коэффициент корреляции расчетных и эмпирических данных был наибольшим среди всех моделей и составил 0,999. Отметим, что уже 3-параметрическая модель имела высокие показатели стандартного отклонения, погрешности и корреляции данных в сравнении с 2-параметрической. Таким образом, 9-параметрическая модель наилучшим образом описывает механические свойства волос человека.

Данные, приведенные в таблице 2, существенно отличаются от полученных с помощью ПК ANSYS. Поскольку в литературе нет единого мнения относительно ввода данных в этот программный комплекс (инженерные или истинные напряжения и деформации), мы приводим оба набора результатов.

Инженерные напряжения и деформации – 2-параметрическая модель: C_{10} = -47,96, C_{01} = 198,61; 3-параметрическая модель: $C_{10} = -1{,}18 \cdot 10^3$, $C_{01} = 1{,}43 \cdot 10^3$, $C_{11} = 4{,}45 \cdot 10^2$; 5-параметрическая модель: $C_{10} = -4{,}64 \cdot 10^3$, $C_{01} = 5{,}01 \cdot 10^3$, $C_{11} = -5{,}61 \cdot 10^4$; $C_{20} = 2{,}03 \cdot 10^4$, $C_{02} = 4{,}13 \cdot 10^4$; 9-параметрическая модель: $C_{10} = -1{,}19 \cdot 10^4$, $C_{01} = 1{,}24 \cdot 10^4$, $C_{11} = -4{,}52 \cdot 10^8$; $C_{20} = 2{,}26 \cdot 10^8$, $C_{02} = 2{,}26 \cdot 10^8$; $C_{21} = -5{,}96 \cdot 10^6$, $C_{12} = -4{,}21 \cdot 10^7$, $C_{30} = 8{,}88 \cdot 10^5$, $C_{03} = 1{,}41 \cdot 10^7$ МПа. «Невязка» (normalized error) составила для 2-, 3- и 5-параметрических моделей 2,64, 1,33 и 1,08 соответственно.

Истинные напряжения и деформации – 2-параметрическая модель: C_{10} = 67,99, C_{01} = 102,90; 3-параметрическая модель: $C_{10} = -1{,}80 \cdot 10^3$, $C_{01} = 2{,}11 \cdot 10^3$, $C_{11} = 8{,}92 \cdot 10^2$; 5-параметрическая модель: $C_{10} = -7{,}49 \cdot 10^3$, $C_{01} = 7{,}95 \cdot 10^3$, $C_{11} = -1{,}77 \cdot 10^5$; $C_{20} = 6{,}79 \cdot 10^4$, $C_{02} = 1{,}21 \cdot 10^5$; 9-параметрическая модель: $C_{10} = -1{,}48 \cdot 10^4$, $C_{01} = 1{,}54 \cdot 10^4$, $C_{11} = 1{,}51 \cdot 10^7$; $C_{20} = -7{,}81 \cdot 10^6$, $C_{02} = -7{,}28 \cdot 10^6$; $C_{21} = 1{,}19 \cdot 10^7$, $C_{12} = -1{,}52 \cdot 10^7$, $C_{30} = -2{,}83 \cdot 10^6$, $C_{03} = 7{,}80 \cdot 10^6$ МПа. «Невязка» (normalized error) составила для 2-, 3- и 5-параметрическсих моделей 2,05, 0,46 и 0,11 соответственно.

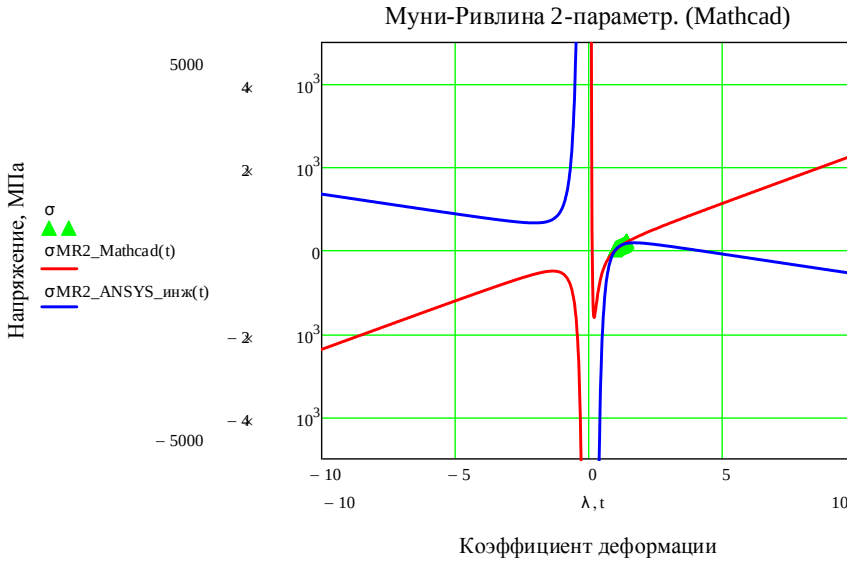
В связи со значительным отличием результатов моделирования в программах Mathcad и ПК ANSYS, а также при использовании инженерных и истинных напряжений и деформаций в ПК ANSYS мы выполнили специальное исследование этого вопроса. Результаты представлены в рисунке 2. Как видно, все кривые, практически идентичные в исследованном интервале деформаций, сильно различаются вне его. Очевидно, что Mathcad и ANSYS используют разные алгоритмы при нахождении решения и «движутся» к нему по разным траекториям. Поэтому данные, полученные с помощью этих приложений, значительно различаются. Отметим, что переход в ANSYS на ввод истинных (Коши) напряжений и деформаций вместо инженерных (условных), рекомендованный в [11], не дал положительных результатов в плане уменьшения расхождений с данными Mathcad. На наш взгляд, различия в результатах расчетов Mathcad и ANSYS должны стать предметом дальнейшего отдельного изучения. Действительно, с одной стороны существуют вышеупомянутые рекомендации [11] и справочная информация ANSYS с другой [12], согласно которой при вводе экспериментальных данных в гиперупругие модели нужно использовать инженерные значения. По утверждению Т.В. Муриной и соавт. «…все напряжения в ANSYS должны быть заданы в условном виде, за исключением объемных, которые задаются в истинном виде» [13].

Модель Муни-Ривлина должна удовлетворять критерий устойчивости, чтобы воспроизводить реальное поведение материала. Критерий устойчивости может быть записан как:

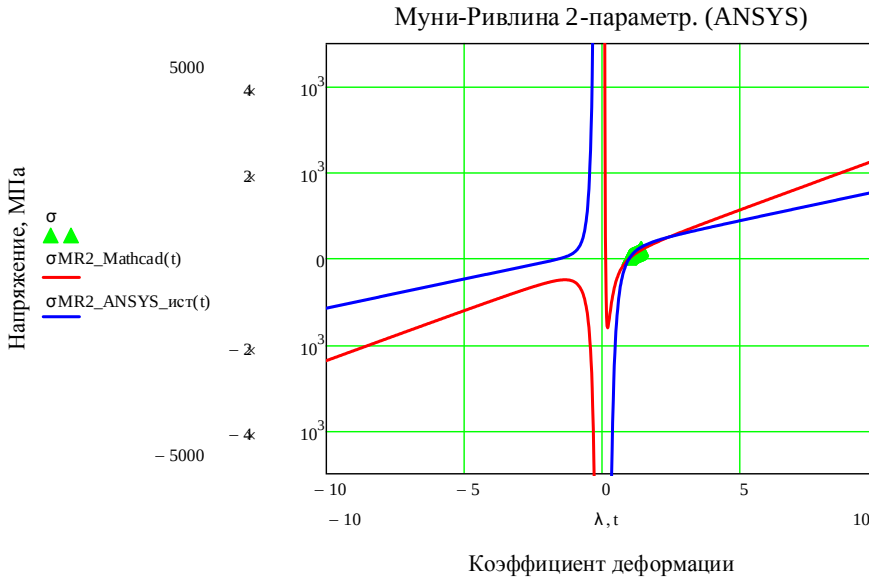
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} \geq 0, \qquad (9)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно. В литературной форме критерий означает, что деформации должны расти при увеличении соответствующих приложенных напряжений. В контексте энергии деформации, связанной с увеличением напряжения, она должна быть больше нуля согласно данному критерию.

А) Mathcad-ANSYS (инженерные напряжения и деформации)



Б) Mathcad-ANSYS (истинные напряжения и деформации)



В) ANSYS (инженерные напряжения и деформации) – ANSYS (истинные напряжения и деформации)

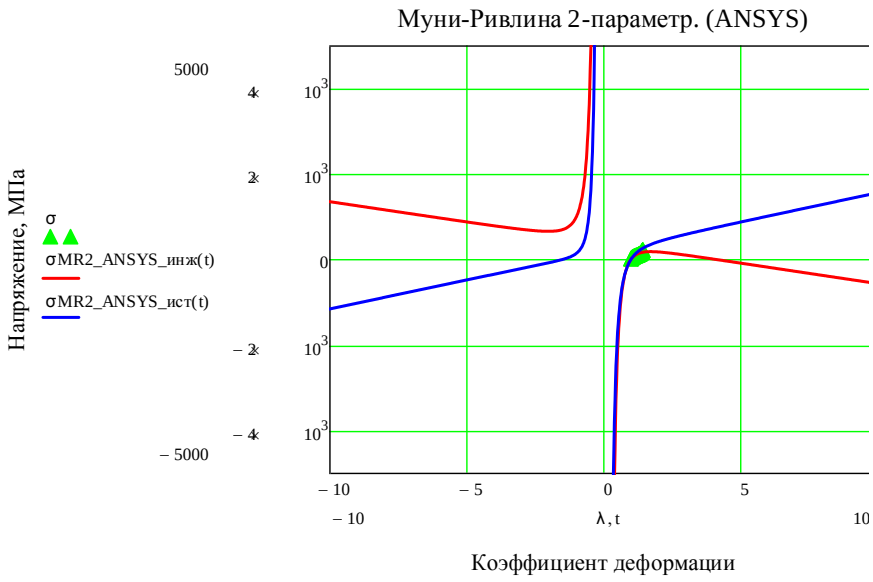


Рис. 2.Сравнение расчетных кривых, полученных в системе Mathcad и ПК ANSYS (2-параметрическая модель Муни-Ривлина)

Таблица 3

Критерии стабильности моделей Муни-Ривлина

Порядок модели	Критерии	Выполнение
2-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0$	+
	$C_{01} \geq 0$	–
3-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0$	+
	$C_{11} \geq 0$	+
5-параметрическая	$C10 + C_{01} \geq 0$	+
	$C_{20} \geq 0$	+
	$C_{02} \leq 0$	–
	$C_{20} + C_{02} + C_{11} \geq 0$	+
9-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0$	+
	$C_{30} \geq 0$	–
	$C_{03} \leq 0$	+
	$C_{20} + C_{02} + C_{11} \geq 0$	–
	$C_{30} + C_{03} + C_{12} + C_{21} \geq 0$	–

Примечание: C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{02}, C_{21}, C_{12}, C_{30}, C_{03} – материальные константы гиперупругих моделей Муни-Ривлина

Это условие, разработанное Hill R. (1958) [14] и Drucker D.C. (1959) [15], предусматривает определенные ограничения на параметры моделей Муни-Ривлина при одноосной нагрузке, как указано ниже (табл. 3). Например, для 2-параметрической модели при малых одноосных деформациях:

$$\sigma = 2C_{10}(1+\varepsilon-(1-2\varepsilon)) + 2C_{01}(1-(1-3\varepsilon)) = 2C_{10}(3\varepsilon) + 2C_{01}(3\varepsilon) = 6\varepsilon(C_{10}+C_{01}),$$

$$\text{откуда } \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 6(C_{10}+C_{01}).$$

Здесь учтено, что $\lambda=\varepsilon+1$ и разложение в ряд: $(1+\varepsilon)^n = 1+n\varepsilon$ при $\varepsilon \ll 1$.

Видно, что в ряде случаев некоторая часть неравенств не выполняется. Впрочем, это видно и из графиков (рис. 2), построенных для расширенного диапазона деформаций, хотя он отсутствует в исследованном деформационном интервале (рис. 1).

Отметим, что модельный начальный модуль Юнга E_0, определенный по графикам (рис. 1) как производная $d\sigma/d\lambda$ ($\lambda=1$), полностью совпал со значениями, найденными по формуле $E_0 \approx 3\mu_0 = 6(C_{10}+C_{01})$, и составил 599,89 МПа, 1,39, 1,92 и 2,84 ГПа. Для 9-параметрической модели эти данные весьма близки к результатам, полученным опытным путем.

Заключение:

1. Рассмотрены 2-, 3-, 5- и 9-параметрические гиперупругие модели Муни-Ривлина волос человека и определены их параметры.

2. Наименьший коэффициент корреляции с опытными данными и, соответственно, наибольшее стандартное отклонение продемонстрировала 2-параметрическая модель (SD=15,742, R=0,974), наибольший коэффициент и наименьшее стандартное отклонение – 9-параметрическая модель (SD=2,857, R=0,99889). 9-параметрическая модель наилучшим образом описывает механические свойства волос человека, однако подтверждено, что и 3-параметрической модели уже достаточно, чтобы описать кривую нагружения с одной точкой перегиба.

3. Начальный модуль Юнга 9-параметрической модели составил E_0=2,84 ГПа, что весьма близко к литературным данным, полученным опытным путем.

4. Данные, полученные в системе компьютерной алгебры Mathcad, существенно отличаются от полученных с помощью ПК ANSYS, что, очевидно, связано с различными алгоритмами вычислений, используемыми программами. При вводе данных в ПК ANSYS оперировали как с инженерными напряжениями и деформациями, так и с их истинными значениями.

5. Оценку устойчивости моделей Муни-Ривлина при одноосном нагружении производили с помощью критерия Хилла и Друкера. Установлено, что определенные ограничения на параметры моделей не выполняются, что было подтверждено анализом кривых σ-λ.

Результаты работы могут быть использованы для интерпретации связи параметров моделей с физическими свойствами материала и выбора модели, подходящей для конкретных практических целей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дегтярев, В. П. Нормальная физиология / В. П. Дегтярев, Н. Д. Сорокина. – Москва: ГЭОТАР-Медиа, 2019. – 480 с.
2. Yamada, H. Strength of Biological Materials / H. Yamada. – Baltimore, 1973. – 297 p.
3. Fung, Y. C. Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues, 2nd Edition / Y. C. Fung. – Springer, June 18, 1993. – 586 p.
4. Муслов, С. А. Упругость и гиперупругость урогенитальных тканей человека и животных / С. А. Муслов, Е. А. Лапшихина, Д. С. Кобзев // Эффективная фармакотерапия. Урология и нефрология. – 2021. – Т. 17. – № 25. – С. 6-24.
5. Измерение и расчет характеристик упругости стенки общего желчного протока человека / С. А. Муслов, Н. В. Зайцева, А. А. Корнеев, А. А. Синицын // Актуальные вопросы биологической физики и химии. – 2022. – Т. 7. – № 1. – С. 92-98.
6. Grebeniuk, L. A. The mechanical properties of human skin / L. A. Grebeniuk, A. A. Utenkin // Fiziologiia Cheloveka. – 1994. – № 20. – P. 157.
7. Measurement of Young's modulus and Poisson's ratio of Human Hair using Optical techniques / Hu Z., Li G., Xie H. [et al] // Article in Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. – December, 2009. – 10 p. DOI: 10.1117/12.851415.
8. Hearle, J. W. S. A critical review of the structural mechanics of wool and hair fibres / J. W. S. Hearle // International Journal of Biological Macromolecules. – 2000. – № 27(2). – pp. 123-138.
9. Structure and mechanical behavior of human hair / Y. Yu, W. Yang, B. Wang, M. Meyers // Materials Science and Engineering: C. – 2017. – № 73. – pp. 152-163.
10.Kumar, N. Hyperelastic Mooney-Rivlin model: Determination and physical interpretation of material constants / N. Kumar, V. V. Rao // MIT International Journal of Mechanical Engineering. – 2016. – № 6(1). – pp. 43-46.
11.Browell, R. The Power of Nonlinear Materials Capabilities / R. Browell, G. Lin. – In: Ray Browell, ANSYS Product Line Manager. – ANSYS Solutions, 2000. – Vol. 2. – № 1. – 7 p.
12.Интернет-ресурс. Официальный сайт ANSYS. Раздел HELP – Mechanical APDL 2022 R2. Input the Hyperelastic Experimental Data. URL: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v222/en/ans_mat/Hlp_G_STRmcfhyp.html?q=hyperelastic. (дата обращения: 20.12.22)
13.Мурина, Т. А. Определение параметров гиперупругих моделей материалов в пакете ANSYS / Т. А. Мурина, В. В. Кузнецов, В. Н. Водяков // Сборник научных трудов международной научно-практической конференции «Энергоэффективные и ресурсосберегающие технологии и системы». Саранск, 2016. – С. 450-456.
14.Hill, R. General theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids / R. Hill // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1958. – № 6(3). – pp. 236-249. DOI: 10.1016/0022-5096(58)90029-2.
15.Drucker, D. C. A definition of a stable inelastic material / D. C. Drucker // Journal of Applied Mechanics. – 1959. – № 26 (1). – pp. 101-195. DOI: 10.1115/1.4011929.

REFERENCES

1. Degtyarev V.P., Sorokina N.D. Normal Physiology. Moscow: GEOTAR-Media, 2019. 480 p. (in Russ.)
2. Yamada H. Strength of Biological Materials. Baltimore, 1973. 297 p.
3. Fung Y.C. Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues, 2nd Edition. Springer, June 18, 1993. 586 p.

4. Muslov S.A., Lapshikhina E.A., Kobzev D.S. Elasticity and hyperelasticity of urogenital tissues of human and animals. *Effective Pharmacotherapy. Urology and Nephrology*, 2021, vol. 17, no. 25, pp. 6-24. (in Russ.)
5. Muslov S.A., Zajtseva N.V., Korneev A.A., Sinitsyn A.A. Measurement and calculation of characteristics describing elasticity of the common bile duct's wall in human. Relevant Issues of Biological Physics and Chemistry, 2022, vol. 7, no. 1, pp. 92-98. (in Russ.)
6. Grebeniuk L.A., Uten'kin A.A. The mechanical properties of human skin. I. *Fiziologiia Cheloveka*, 1994, no. 20, p. 157.
7. Hu Z., Li G., Xie H., Hua T., Chen P., Huang F. Measurement of Young's modulus and Poisson's ratio of Human Hair using Optical techniques. Article in Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. December, 2009. 10 p. DOI: 10.1117/12.851415.
8. Hearle J.W.S. A critical review of the structural mechanics of wool and hair fibres. *International Journal of Biological Macromolecules*, 2000, no. 27(2), pp. 123-138.
9. Yu Y., Yang W., Wang B., Meyers M.A. Structure and mechanical behavior of human hair. *Materials Science and Engineering: C*, 2017. no. 73, pp. 152-163.
10.Kumar N., Rao V.V. Hyperelastic Mooney-Rivlin model: Determination and physical interpretation of material constants. *MIT International Journal of Mechanical Engineering*, 2016, no. 6(1), pp. 43-46.
11.Browell R., Lin G. The Power of Nonlinear Materials Capabilities. In: Ray Browell, ANSYS Product Line Manager. ANSYS Solutions, 2000, vol. 2, no. 1, 7 p.
12.Official ANSYS website. HELP section – Mechanical APDL 2022 R2. Input the Hyperelastic Experimental Data. Available at: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v222/en/ans_mat/Hlp_G_STRmcfhyp.html?q=hyperelastic (accessed 20.12.22)
13.Murina V.A., Kuznetsov V.V., Vodikov V.N. Identifying parameters of hyperelastic material models with the ANSYS package. Collection of works of the International Scientific and Practical Conference "Energy Efficient and Resource Preserving Technologies and Systems. Saransk, 2016. pp. 450-456. (in Russ.)
14.Hill R. General theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1958, no. 6(3), pp. 236-249. DOI: 10.1016/0022-5096(58)90029-2.
15.Drucker D.C. A definition of a stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics*, 1959, no. 26 (1), pp. 101-195. DOI: 10.1115/1.4011929.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Сергей Александрович Муслов – кандидат физико-математических наук, доктор биологических наук, профессор кафедры нормальной физиологии и медицинской физики МГМСУ им. А.И. Евдокимова, Москва, e-mail: muslov@mail.ru, elibrary AuthorID: 185513, ORCID ID: 0000-0002-9752-6804.

Сергей Дарчоевич Арутюнов – Заслуженный врач РФ, Заслуженный деятель науки РФ, доктор медицинских наук, профессор, заведующий кафедрой цифровой стоматологии, МГМСУ им. А.И. Евдокимова, Москва, e-mail: sd_arutjunov@mail.ru.

Сергей Сергеевич Перцов – доктор медицинских наук, профессор, директор ФГБНУ «НИИ нормальной физиологии им. П.К. Анохина», Москва, e-mail: s_pertsov@mail.ru.

Карен Григорьевич Караков – Заслуженный врач РФ, доктор медицинских наук, профессор, заведующий кафедрой терапевтической стоматологии ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный медицинский университет» Минздрава России, Ставрополь, e-mail: terstomsgma@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS:

Sergej Aleksandrovich Muslov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Biological Sciences, Professor of the Department of Normal Physiology and Medical Physics, Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, e-mail: muslov@mail.ru, elibrary AuthorID: 185513, ORCID ID: 0000-0002-9752-6804.

Sergej Darchoevich Arutyunov – Honored Doctor of Russia, Honored Scientist of Russia, Doctor of Medical Sciences, Professor, Head of the Department of Digital Dentistry, Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, e-mail: sd_arutjunov@mail.ru.

Sergej Sergeevich Pertsov – Doctor of Medical Sciences, Professor, Director, Research Institute of Normal Physiology named after P.K. Anokhin, Moscow, e-mail: s_pertsov@mail.ru.

Karen Grigor'evich Karakov – Honored Doctor of Russia, Doctor of Medical Sciences, Professor, Head of the Department of Therapeutic Dentistry, Stavropol State Medical University, Stavropol, e-mail: ter-stomsgma@yandex.ru.

Для цитирования: Анализ механических свойств волос человека с помощью гиперупругих моделей Муни-Ривлина / С. А. Муслов, С. Д. Арутюнов, С. С. Перцов, К. Г. Караков // Современные вопросы биомедицины. – 2023. – Т. 7. – № 2. DOI: 10.24412/2588-0500-2023_07_02_37

For citation: Muslov S.A., Arutyunov S.D., Pertsov S.S., Karakov K.G. Analysis of mechanical properties of human hair using hyperelastic Mooney-Rivlin models. *Modern Issues of Biomedicine*, 2023, vol. 7, no. 2. DOI: 10.24412/2588-0500-2023_07_02_37