Дата публикации: 01.09.2023
DOI: 10.24412/2588-0500-2023_07_03_43
УДК 611.314

Publication date: 01.09.2023
DOI: 10.24412/2588-0500-2023_07_03_43
UDC 611.314

СВЯЗОЧНЫЙ АППАРАТ ЗУБА, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МОДУЛЬ ЮНГА И ГИПЕРУПРУГИЕ МОДЕЛИ МУНИ-РИВЛИНА ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКИ

Е.А. Чижмаков[1], К.Г. Караков[2], С.А. Муслов[1], А.В. Эм[2], С.Д. Арутюнов[1]
[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный медико-стоматологический университет имени А.И. Евдокимова» Министерства здравоохранения Российской Федерации, г. Москва, Россия
[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ставропольский государственный медицинский университет» Министерства здравоохранения Российской Федерации, г. Ставрополь, Россия

Аннотация. Прогноз подвижности зубов при функциональных стоматологических нагрузках требует глубокого понимания механического поведения периодонтальной связки (PDL), что является критическим вопросом в биомеханике зубов. Возможность замены периодонта искусственными аналогами с заданными свойствами также требует знания механических свойств периодонтальной связки. В данной работе получены значения коэффициентов семейства моделей Муни-Ривлина с разным числом параметров для гиперупругого материала PDL. Во введении рассмотрены актуальность, состояние вопроса и теоретические предпосылки. Использовали литературные данные и собственные расчеты. Применяли систему компьютерной алгебры Mathcad 15.0 и многоцелевой комплекс компьютерных программ ANSYS 2022 R2. Сравнение результатов показало наличие существенных расхождений в численных значениях данных расчетов. Тем не менее, все модели Муни-Ривлина, начиная с 3-параметрической, показали хорошую корреляцию с опытными данными и минимальную абсолютную и относительную ошибки. Наименьшее стандартное отклонение расчетных данных от опытных и наибольшую корреляцию расчетных данных с опытными продемонстрировала 9-параметрическая модель. Полученные результаты могут способствовать разработке точной конститутивной модели PDL человека и созданию искусственной периодонтальной связки.
Ключевые слова: периодонтальная связка, упругие модули, гиперупругость.

LIGAMENT SYSTEM OF THE TOOTH, DIFFERENTIAL YOUNG'S MODULUS AND HYPERELASTIC MOONEY-RIVLIN MODELS OF THE PERIODONTAL LIGAMENT

E.A. Chizhmakov[1], K.G. Karakov[2], S.A. Muslov[1], A.V. Em[2], S.D. Arutyunov[1]
[1]A.I. Evdokimov Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, Russia
[2]Stavropol State Medical University, Stavropol, Russia

Annotation. The prediction of tooth mobility under functional dental loads requires a deep understanding of the mechanical behavior of the periodontal ligament (PDL), which is a critical issue in dental biomechanics. The possibility of replacing periodontium with artificial analogues possessing desired properties also requires knowledge of the periodontal ligament's mechanical properties. In this paper, the values of the coefficients of the Mooney-Rivlin models' family with a different number of parameters for the PDL hyperelastic material are obtained. The introduction discusses the relevance, state of the issue and theoretical background. Literature data and own calculations were used. We used the computer algebra system Mathcad 15.0 and the multipurpose software package ANSYS 2022 R2. Comparison of the results revealed the presence of significant discrepancies in the numerical values of these calculations. However, all Mooney-Rivlin models, starting with the three-parameter one, demonstrated good correlation with experimental data and minimal absolute and relative errors. The smallest standard deviation of the calculated data from the experimental data and the highest correlation with the calculated data was demonstrated by the nine-parameter model. The results obtained may contribute to the development of an accurate constitutive model of human PDL and the development of an artificial periodontal ligament.
Keywords: periodontal ligament, elastic moduli, hyperelasticity.

Введение. Как известно, периодонтальная связка (PDL = periodontal ligament) представляет связочный аппарат зуба и играет важную демпфирующую роль при движениях зуба. Она располагается в периодонтальной щели между цементом и альвеолярной костью, т.е. окружает корни зуба. Тем самым осуществляется передача значительных нагрузок от зуба на альвеолярную кость без выраженных зон концентрации напряжений [1]. Современные исследования доказали возможность аутотрансплантации периодонтальной связки, тем самым обусловив успешность данной операции [2]. «Восстановление» периодонта в этом случае обусловлено образованием фиброзного соединения между частями соединительнотканных волокон на поверхности корня и лунки.

Изучению механических свойств и интерпретации эмпирических данных периодонтальной связки посвящено весьма большое число исследований. В работе Шилько С.В. (2003) [1] рассмотрена проблема реконструкции периодонта зубочелюстной системы. С позиций биомеханики проведен структурно-функциональный анализ периодонтальной связки, соединяющей корень зуба с альвеолярной костью. В отличие от обычно используемой модели однородного изотропного слоя, периодонтальная связка интерпретируется как трансверсально-изотропный пороматериал. При этом бимодульность может быть связана с закрытием пор при сжатии материала связки. Представляется, что высокая биосовместимость, эластичность, вязкость, адгезия к твердым биотканям и достаточная прочность ряда полимеров позволяют считать их наиболее пригодными материалами для создания искусственной периодонтальной связки.

Результаты исследования [3] показали, что механические свойства PDL резцов зависит от её местоположения (ANOVA, p=0,022). Значения модуля упругости установили равным в диапазоне от 0,607 и 4,274 МПа при нагрузках от 1 до 5 Н. Кроме того, упругое поведение PDL зависит от скорости нагрузки, типа зуба, уровня корня и индивидуальных вариаций.

В рамках нелинейной модели вязкоупругие свойства PDL изучались в [4]. Предложена вязкоупругая конститутивная модель для описания явлений релаксации PDL: $\sigma=\mu(1-1/\lambda^3)+(k/2\alpha)\exp(\alpha[\lambda^2-1]-1)$, определены численные значения параметров μ, k и α.

Авторы [5] с помощью кривых наноиндентирования PDL взрослой свиньи получили хорошее соответствие результатов моделирования и экспериментальных данных. Применяли модели Веронда-Вестманн (V-W), Огдена и 2-параметрическую Муни-Ривлина. Используя модель, имитировали методом конечных элементов движение зуба под ортодонтической нагрузкой, дабы предсказать механические реакции зуба. При этом были обнаружены локальные концентрации напряжений и деформаций.

Исследование [6] посвящено разработке нелинейной анизотропной модели периодонтальной связки человека. Авторы считают, что полное знание поведения PDL жизненно важно для понимания механики ортодонтической подвижности зубов, реакции мягких тканей и предлагаемых планов лечения. Есть убедительные доказательства того, что деформация PDL является ключевым фактором, определяющим ортодонтическое перемещение зубов. Материал связки в сообщении предполагается сжимаемым, вязко-гиперупругим и трансверсально-изотропным, с пористой структурой, армированной волокном.

В работе [7] исследовали гиперупругие свойства PDL с помощью моделей: неогуковская, Муни-Ривлина, Огдена, полиномиальная и Веронда-Вестманн, однако из моделей Муни-Ривлина была рассмотрена только одна, наиболее простая – 2-параметрическая модель.

Деформационное поведение биологических тканей обычно нелинейно. Нелинейность означает, что классический закон Гука “Ut tension sic vis” («каково растяжение, такова и сила») не выполняется,

справедлива более сложная, нелинейная зависимость между деформацией и механическим напряжением σ=σ(ε). Это приводит к переходу от модели абсолютно упругого тела к более адекватным и реальным гиперупругим моделям материалов и тканей. Среди моделей одной из самых популярных является модель гиперупругого материала Муни-Ривлина, предложенная в 1940 г. наравне с неогуковской и получившая теоретическое описание в 1948 г. В целом, модель Муни-Ривлина получила широкое признание и применение. С полученными материальными константами C_{10} и C_{01} для 2-параметрической модели она предназначается для дальнейших исследований напряженно-деформированного состояния тел и может содержать до 9-и параметров. Четыре типа потенциалов предоставляют пользователям больше возможностей для моделирования поведения различных материалов. Какую из этих четырех моделей Муни-Ривлина следует использовать в практическом моделировании? Её часто определяют по кривой деформации-напряжения в экспериментах с материалами. Считается, что для кривой напряжения-деформации с одной кривизной (без точки перегиба) можно использовать 2- или 3-параметрическую модель. Для кривой с бинарной кривизной (и одной точкой перегиба) можно применить 5-параметрическую. Для кривых с 2-я точками перегиба можно выбрать 9-параметрическую модель. В данной работе этот вопрос обсуждается более детально на основании ряда статистических параметров.

Для одноосных напряжений энергия упругой деформации может быть выражена через инварианты тензора деформаций I_1, I_2 и I_3:

$$W = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_{ij}(I_1-3)^i(I_2-3)^j, \quad (1)$$

где

$$I_1 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2,\ I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_3^2},\ \lambda = \frac{l}{l_0}$$

– кратность деформации, $I_3=1$ (для несжимаемого материала). Отсюда можно получить вид функции σ=σ(λ) для каждой из модели Муни-Ривлина, используя уравнения [8-9]:

$$\sigma = 2(\lambda^2-\frac{1}{\lambda})(\frac{\partial W}{\partial I_1}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial I_2}) \text{ и } I_1 = \lambda^2+\frac{2}{\lambda},\ I_2 = \frac{1}{\lambda^2}+2\lambda\ . \quad (2)$$

В [10] приведены следующие расчетные формулы:

$$\sigma_{2p} = 2C_{10}(\lambda-\frac{1}{\lambda^2})+2C_{01}(1-\frac{1}{\lambda^3}), \quad (3)$$

2-параметрической,

$$\sigma_{3p} = \sigma_{2p}+6C_{11}(\lambda^2-\lambda-1+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}-\frac{1}{\lambda^4}), \quad (4)$$

3-параметрической,

$$\sigma_{5p} = \sigma_{3p}++4C_{20}\lambda(1-\frac{1}{\lambda^3})(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3)+4C_{02}(2\lambda+\frac{1}{\lambda^2}-3)(1-\frac{1}{\lambda^3}), \quad (5)$$

5-параметрической и

$$\begin{aligned}\sigma_{9p} = \sigma_{5p}++2C_{21}(1-\frac{1}{\lambda^3})(2\lambda+\frac{1}{\lambda^2}-3)(2\lambda^3-4\lambda+\frac{1}{\lambda^2}+1)+\\ +2C_{12}(1-\frac{1}{\lambda^3})(2\lambda+\frac{1}{\lambda^2}-3)(4\lambda^2-\frac{5}{\lambda}-3\lambda-6)+6C_{30}(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3)^2(\lambda-\frac{1}{\lambda^2})+\\ +6C_{03}(2\lambda+\frac{1}{\lambda^2}-3)^2(1-\frac{1}{\lambda^3}).\end{aligned} \quad (6)$$

для 9-параметрической модели соответственно.

В формуле (2) используются истинное напряжение (Коши), в формулах (3-6) – условные (инженерные). Как известно, $\sigma_{ист}=\sigma_{инж}\ \lambda$.

Методы и организация исследования. Зная конкретный вид зависимости $\sigma=\sigma(\lambda)$, можно определить значения материальных констант C_{ij} моделей. Эта процедура носит название “fitting” и может быть выполнена, например, в пакете алгебраических вычислений Mathcad или многоцелевом комплексе компьютерных программ ANSYS. Именно эти программы использовались для определения коэффициентов моделей Муни-Ривлина периодонтальной связки в данной работе. Использовали литературные данные, полученные Bin Wu et al (2018) [3] и собственные выполненные расчеты.

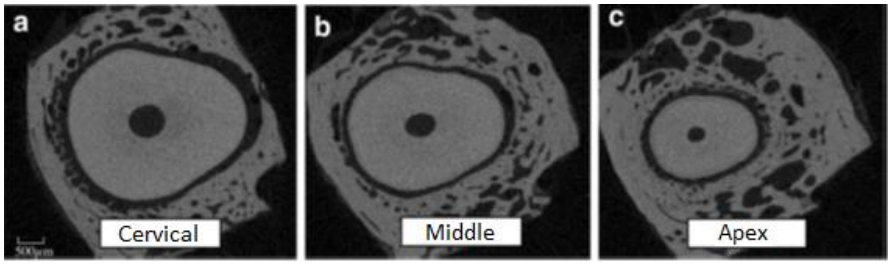


Рис. 1. Микрокомпьютерная томограмма поперечных сечений периодонтальной связки PDL на различных уровнях зуба: пришеечный (a), средний (b) и апикальный (c) [3]

Результаты исследования и их обсуждение. *1. Дифференциальный модуль Юнга.* График испытаний образцов на растяжение и расчетная кривая σ-ε, построенная с помощью экспоненциальной функции:

$$\sigma = a^*(\exp [b^*\varepsilon] - 1) \qquad (7)$$

PDL центрального резца представлены на рис. 2. Средняя квадратичная ошибка аппроксимации составила 0,01, максимальная абсолютная ошибка – 0,02, максимальная относительная ошибка – 3,59%, коэффициент корреляции между опытными и расчетными данными – 0,999, что свидетельствует об адекватности экспоненциальной модели (7). Коэффициент корреляции рассчитывали с помощью функции *corr* Mathcad 15.0.

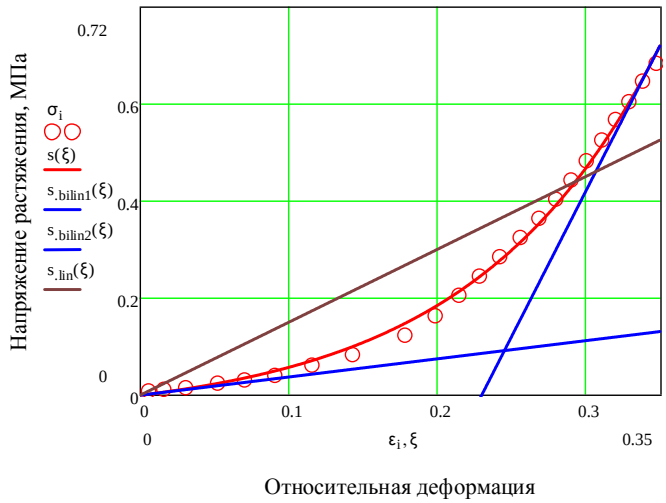


Рис. 2. Опытные данных (точки) и аппроксимирующие кривые напряжение (σ, s) – деформация (ε, ξ). Экспоненциальная, билинейная и линейная аппроксимация Центральный резец, пришеечный отдел PDL, мезиальная сторона

Такое механическое поведение является типичным для мягких биологических тканей и соответствует бимодульной природе пассивных упругих свойств материала: при небольших деформациях на сопротивление нагрузке «работают» белковые эластиновые структуры, выше некоторой критической «включаются» более жесткие коллагеновые волокна (рис. 3).

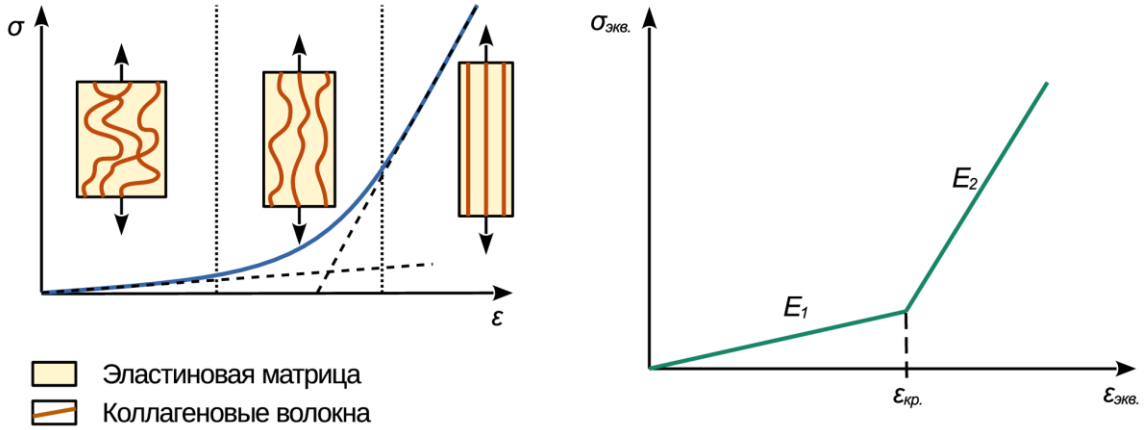


Рис. 3. Механизм билинейной упругости, обусловленный запаздыванием деформации коллагеновых волокон по сравнению с эластиновыми (а) и соответствующая численная модель (б)

Дифференциальный модуль Юнга PDL является инкрементальным, то есть увеличивающимся по мере удлинения связки. Расчетный модуль был минимальным в исходном состоянии и равнялся 0,377 МПа, максимальный – 6,026 МПа (при ε=0,35 МПа), среднее значения модуля – 2,037 МПа, E_{max}/E_{min}=16,001. Упругие модули Юнга билинейной модели E_1=1,82 и E_2=5,59 МПа, $\varepsilon_{кр.}$=0,24. Параметры зависимости (7) *a*=47 кПа, *b*=7,978 определялись с помощью функции *genfit* Mathcad 15.0.

2. Расчет Cij в Mathcad 15.0. Постоянные Cij гиперупругих моделей Муни-Ривлина определялись в Mathcad с помощью функции *linfit* (табл. 1).

Таблица 1

Параметры C_{ij} моделей Муни-Ривлина, МПа (рассчитаны в Mathcad 15.0)

	C_{10}	C_{01}	C_{11}	C_{20}	C_{02}	C_{21}	C_{12}	C_{30}	C_{03}
2-парам.	2,112	-2,299	–	–	–	–	–	–	–
3-парам.	-0,776	0,878	1,195	–	–	–	–	–	–
5-парам.	-0,591	0,708	37,913	-14,683	-23,174	–	–	–	–
9-парам.	-4,791	5,008	$1{,}44\cdot10^{7}$	$-2{,}29\cdot10^{6}$	$-2{,}04\cdot10^{7}$	$1{,}53\cdot10^{6}$	$-1{,}64\cdot10^{6}$	$-2{,}34\cdot10^{5}$	$-1{,}02\cdot10^{6}$

Примечание: C_{10}-C_{03} – материальные константы гиперупругих моделей

В таблице 2 приведены данные, позволяющие судить, насколько расчетные кривые близки к опытной (максимальное абсолютное отклонение, стандартное отклонение, относительная ошибка и коэффициент корреляции).

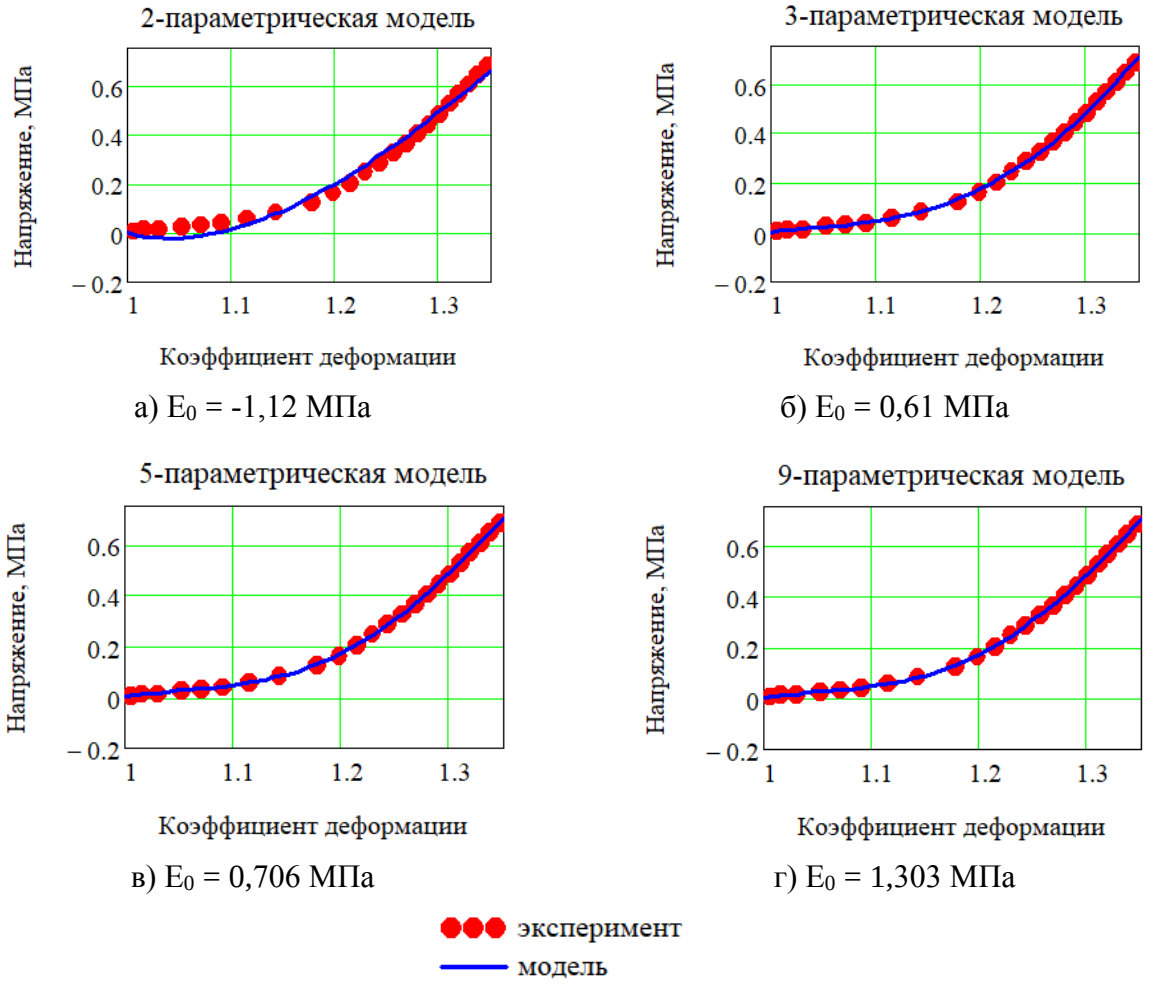
Соответствующие деформационные кривые (опытная и расчетные) σ(ε) представлены на рисунке 4.

Видно, что 9-параметрическая модель Муни-Ривлина демонстрирует наименьшие отклонения и ошибки (Δ, SD, δ) по отношению к эмпирическим показателям. При этом наибольшую тесноту связи R показала 3-параметрическая модель. Этот результат весьма неожиданен и требует, очевидно, дополнительного изучения.

Таблица 2

Статистические параметры расчета постоянных C_{ij} моделей Муни-Ривлина

	Макс. абсолют. отклонение (Δ), МПа	Стандартное отклонение (SD), МПа	Относительная ошибка (δ), %	Коэффициент корреляции (R)
2-парам.	0,027	0,032	4,662	0,993
3-парам.	0,011	0,004	1,648	1
5-парам.	0,006	0,003	0,918	0,99988
9-парам.	0,003	0,002	0,502	0,99996



а) E_0 = -1,12 МПа

б) E_0 = 0,61 МПа

в) E_0 = 0,706 МПа

г) E_0 = 1,303 МПа

Рис. 4. Опытная и расчетные кривые σ = σ(ε) 2-(а), 3-(б), 5-(в) и 9-параметрической (г) моделей Муни-Ривлина.

Примечание: на оси абсцисс отложены значения коэффициента деформации, на оси ординат – напряжения, МПа

Из рисунка 4 следует, что гиперупругий начальный модуль Юнга наиболее близок к упругому модулю в исходном состоянии экспоненциальной модели для 3-параметрической гиперупругой модели Муни-Ривлина (0,61 МПа). Для 2-параметрической модели он меньше нуля (-1,12 МПа), что означает ее механическую нестабильность ($d\sigma/d\lambda < 0$) при малых деформациях.

В то же время для получения механических свойств, адекватных реальному поведению материала, параметры Муни-Ривлина должны удовлетворять определенным требованиям. В связи с этим

представляют интерес аспекты устойчивости (стабильности) моделей Муни-Ривлина. Критерии устойчивости гиперупругих моделей Муни-Ривлина, предложенные Hill-Drucker, достаточно подробно изложены в [10] и никем не оспариваются. Их физическая суть заключается в том, что при увеличении нагрузки длина образца должна тоже увеличиваться. Алгебраически это означает, что производная $d\delta/d\lambda$ должна быть везде больше нуля, а графически – график функции $\sigma=\sigma(\lambda)$ не должен содержать локальных минимумов. Видно, что для 2-параметрической модели эти условия не выполняются (табл. 3, рис. 4, а). Кроме того, для 2-параметрической модели не выполняются критерии $C_{10}+C_{01}>0$ и $C_{01}>0$ [10], то есть модель не описывает реальное поведение материала (при малых деформациях). Для 3-параметрической модели Муни-Ривлина оба неравенства $C_{10}+C_{01}>0$ и $C_{11}>0$ справедливы, 5-параметрической – неравенства $C_{10}+C_{01}>0$, $C_{02}<0$, $C_{02}+C_{20}+C_{11}>0$, но $C_{20}<0$, что не предусмотрено требованиями Hill-Drucker. У 9-параметрической модели периодонтальной связки удовлетворяют правилам неравенства $C_{10}+C_{01}>0$, $C_{03}>0$, $C_{03}+C_{30}+C_{12}+C_{21}>0$, однако несправедливы $C_{03}<0$ и $C_{02}+C_{20}+C_{11}>0$. Эти вопросы очевидно также требуют дополнительного рассмотрения, потому что на соответствующих графиках моделей (рис. 4, в, г) области с локальным минимумом отсутствуют, а все функции монотонны и без точек перегиба.

3. Расчет Cij в ANSYS 2022 R2. Постоянные C_{ij} моделей Муни-Ривлина также вычислялись в многоцелевом пакете программ ANSYS 2022 R2 Mechanical. При вводе данных использовали инженерные деформации и напряжения. Результаты расчетов и их погрешность отражены в табл. 3.

Таблица 3

Параметры C_{ij} моделей Муни-Ривлина, МПа (рассчитаны в ANSYS 2022 R2)

	C_{10}	C_{01}	C_{11}	C_{20}	C_{02}	C_{21}	C_{12}	C_{30}	C_{03}
2-парам.	2,112	-2,299	–	–	–	–	–	–	–
3-парам.	-0,776	0,878	1,195	–	–	–	–	–	–
5-парам.	-0,590	0,708	37,913	-14,683	-23,174	–	–	–	–
9-парам.	-18,628	18,977	$-3{,}14\cdot10^5$	$1{,}56\cdot10^5$	$1{,}58\cdot10^5$	$4{,}63\cdot10^4$	$-9{,}71\cdot10^4$	$-1{,}20\cdot10^4$	$4{,}12\cdot10^4$

Примечание: C_{10}-C_{03} – материальные константы гиперупругих моделей; SD (стандартное отклонение): 0,017 (2-парам.), 0,0005 (3-парам.), 0,0002 (5-парам.), 0,0001 (9-парам.)

Сравнивая численные данные, полученные с помощью программных пакетов Mathcad и ANSYS, можно сделать вывод, что они практически совпадают для 2-, 3-, и 5-параметрической моделей, но сильно различаются для 9-параметрической. Этот факт, очевидно, также требует дальнейшего изучения. Вероятно, он обусловлен различиями в итерационных процедурах, используемых программами при вычислениях. Кроме того, формула (6), выведенная в [10], требует перепроверки.

Установленные численные значения C_{ij} могут быть полезны при анализе напряженно-деформированного состояния связочного аппарата зуба для лучшего понимания его демпфирующего эффекта при действии ортодонтических сил и жевательной нагрузки, разработке искусственной периодонтальной связки для адекватного биомеханического соединения имплантов с альвеолярной костью при протезировании.

Заключение:

1. Пассивные механические свойства периодонтальной связки резцов человека хорошо описываются экспоненциальной функцией $\sigma=a*(\exp[b*\varepsilon]-1)$, a=0,047 МПа, b=7,978. Средняя квадратичная ошибка аппроксимации экспоненциальной функцией составила 0,01 МПа, максимальная абсолютная ошибка – 0,027 МПа, максимальная относительная ошибка – 3,59%, коэффициент корреляции между эмпирическими и расчетными данными – 99,9%. Дифференциальный модуль Юнга

PDL является инкрементальным и увеличивающимся по мере удлинения связки, что обычно для мягких биологических тканей. Расчетный модуль минимален в исходном состоянии и равен 0,377 МПа, максимальный – 6,026 МПа (ε=0,35 МПа), среднее значение модуля – 2,037 МПа, модуль линейной регрессии – 1,50 МПа, E_{max}/E_{min}=16,00. Модули Юнга билинейной модели – E_1=1,82 МПа и E_2=5,59 МПа, $\varepsilon_{кр.}$=0,24.

2. Гиперупругая модель Муни-Ривлина хорошо описывает экспериментальную кривую нагружения PDL резцов человека. Модель Муни-Ривлина с 2-я параметрами достаточно адекватна поведению материала при больших деформациях, но не подходит для малых (в пределах деформации до 20%).

3. Двухпараметрическая модель Муни-Ривлина является нестабильной в области малых деформаций и не отражает реальное поведение материала.

4. Модели Муни-Ривлина с 3-мя и более параметрами позволяют описать экспериментальную кривую с наименьшей абсолютной погрешностью во всем исследованном интервале деформаций (до ε=0,35).

5. Результаты, полученные с помощью программных пакетов Mathcad 15.0 и ANSYS 2022 R2, практически совпадают для 2-, 3-, и 5-параметрической моделей, но сильно различаются для 9-параметрической, что требует дальнейшего изучения.

6. Полученные данные могут быть использованы при подборе биосовместимого материала аналога связки при трансплантации и аутотрансплантации.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шилько, С. В. Биомеханический анализ периодонтальной связки / С. В. Шилько // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т. 7, Ч. 1. – № 3. – С. 29-34.
2. Бадалян, В. А. Факторы успеха при аутотрансплантации зубов / В. А. Бадалян, А. М. Зедгенидзе // Стоматология. – 2020. – № 99(4). – С. 81-85. DOI: 10.17116/stomat202099 04181.
3. Tensile testing of the mechanical behavior of the human periodontal ligament / Wu B., Fu Y., Shi H. [et al] // BioMed Eng OnLine. – 2018. – № 17. – P. 172. DOI: 10.1186/s12938-018-0607-0.
4. Constitutive modeling of the non-linear viscoelasticity of the periodontal ligament / A. Natalia, P. Pavan, C. Venturato, K. Komatsu // Computer methods and programs in biomedicine. – 2011. – № 104. – pp. 193-198.
5. Mechanical responses of the periodontal ligament based on an exponential hyperelastic model: a combined experimental and finite element method / Huang H., Tang W., Yan B. [et al]// Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. – 2015. – № 19(2). – pp. 188-198. DOI: 10.1080/10255842.2015.1006207.
6. A constitutive model for the periodontal ligament as a compressible transversely isotropic visco-hyperelastic tissue / A. I. Zhurov, G. Limbert, D. P. Aeschlimann, J. Middleton // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. – 2007. № 10(3). – pp. 223-235.
7. Mapping of elastic and hyperelastic properties of the periodontal ligament / Muslov S. A., Panin S. V., Zolotnitskij I. V. [et al] // Mechanics of Composite Materials. – 2023. – Vol. 59. – № 3. – pp. 469-478.
8. Иванов, Д. В. Определение постоянных для моделей нео-Гука и Муни-Ривлина по результатам экспериментов на одноосное растяжение / Д. В. Иванов, О. А. Фомкина // Математика. Механика. – 2008. – № 10. – С. 114-117.
9. Анализ механических свойств волос человека с помощью гиперупругих моделей Муни-Ривлина / С. А. Муслов, С. Д. Арутюнов, С. С. Перцов, К. Г. Караков // Современные вопросы биомедицины. – 2023. – Т. 7. – № 2. DOI: 10.51871/2588-0500_2023_07_02_37.
10. Kumar, N. Hyperelastic Mooney-Rivlin model: Determination and physical interpretation of material constants / N. Kumar, V. V. Rao // MIT International Journal of Mechanical Engineering. – 2016. – № 6(1) – pp. 43-46.

REFERENCES

1. Shil'ko S.V. Biomechanical analysis of periodontal ligament. *Russian Journal of Biomechanics*, 2003, vol. 7, part 1, no. 3, pp. 29-34. (in Russ.)

2. Badalyan V.A., Zedgenidze A.M. Success factors for dental autotransplantation. *Stomatologiya*, 2020, no. 99(4), pp. 81-85. DOI: 10.17116/stomat20209904181 (in Russ.)
3. Wu B., Fu Y., Shi H. Yan B., Lu R., Ma S., Markert B. Tensile testing of the mechanical behavior of the human periodontal ligament. *BioMed Eng OnLine*, 2018, no. 17, p. 172. DOI: 10.1186/s12938-018-0607-0.
4. Natalia A.N., Pavan P.G., Venturato C., Komatsu K. Constitutive modeling of the non-linear viscoelasticity of the periodontal ligament. *Computer methods and programs in biomedicine*, 2011, no. 104, pp. 193-198.
5. Huang H., Tang W., Yan B., Wu B., Cao D. Mechanical responses of the periodontal ligament based on an exponential hyperelastic model: a combined experimental and finite element method. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2015, no. 19(2), pp. 188-198. DOI: 10.1080/10255842.2015.1006207.
6. Zhurov A.I., Limbert G., Aeschlimann D.P., Middleton J. A constitutive model for the periodontal ligament as a compressible transversely isotropic visco-hyperelastic tissue. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2007, no. 10(3), pp. 223-235.
7. Muslov S.A., Panin S.V., Zolotnitskij I.V., Pivovarov A.A., Anischenko A.P., Arutyunov S.D. Mapping of elastic and hyperelastic properties of the periodontal ligament. *Mechanics of Composite Materials*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 469-478.
8. Ivanov D.V., Fomkina O.A. Identifying constants for the Neo-Hookean and Mooney-Rivlin models according to the uniaxial tension test results. *Matematika. Mekhanika*, 2008, no. 10, pp. 114-117. (in Russ.)
9. Muslov S.A., Arutyunov S.D., Pertsov S.S., Karakov K.G. Analysis of mechanical properties of human hair using hyperelastic Mooney-Rivlin models. *Modern Issues of Biomedicine*, 2023, vol. 7, no. 2. DOI: 10.51871/2588-0500_2022_07_02_37 (in Russ.)
10. Kumar N., Rao V.V. Hyperelastic Mooney-Rivlin model: Determination and physical interpretation of material constants. *MIT International Journal of Mechanical Engineering*, 2016, no. 6(1), pp. 43-46.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:
Евгений Александрович Чижмаков – ассистент кафедры технологий протезирования в стоматологии МГМСУ им. А.И. Евдокимова, Москва, e-mail: evgeniychigmakov@yandex.ru.
Карен Григорьевич Караков – доктор медицинских наук, профессор, заведующий кафедрой терапевтической стоматологии Ставропольского государственного медицинского университета, Ставрополь e-mail: terstomsgma@yandex.ru.
Сергей Александрович Муслов – кандидат физико-математических наук, доктор биологических наук, профессор кафедры нормальной физиологии и медицинской физики МГМСУ им. А.И. Евдокимова, Москва, e-mail: muslov@mail.ru.
Александра Викторовна Эм – кандидат медицинских наук, ассистент кафедры организации стоматологической помощи, менеджмента и профилактики стоматологических заболеваний Ставропольского государственного медицинского университета, Ставрополь, e-mail: terstomsgma@yandex.ru.
Сергей Дарчоевич Арутюнов – Заслуженный врач РФ, Заслуженный деятель науки РФ, доктор медицинских наук, профессор, заведующий кафедрой цифровой стоматологии МГМСУ им. А.И. Евдокимова, Москва, e-mail: sd.arutyunov@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS:
Evgenij Aleksandrovich Chizhmakov – Assistant of the Department of Prosthetics Technologies in Dentistry, A.I. Evdokimov Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, e-mail: evgeniychigmakov@yandex.ru.
Karen Grigor'evich Karakov – Doctor of Medical Sciences, Professor, Head of the Department of Therapeutic Dentistry, Stavropol State Medical University, Stavropol, e-mail: terstomsgma@yandex.ru.
Sergej Aleksandrovich Muslov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Biological Sciences, Professor of the Department of Normal Physiology and Medical Physics, A.I. Evdokimov Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, e-mail: muslov@mail.ru.
Aleksandra Viktorovna Em – Candidate of Medical Sciences, Assistant of the Chair of Organization of Dental Care, Management and Prevention of Dental Diseases, Stavropol State Medical University, Stavropol, e-mail: terstomsgma@yandex.ru.

Sergej Darchoevich Arutyunov – Honored Physician of Russia, Honored Scientist of Russia, Doctor of Medical Sciences, Professor, Head of the Department of Digital Dentistry, A.I. Evdokimov Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, e-mail: sd.arutyunov@mail.ru.

Для цитирования: Связочный аппарат зуба, дифференциальный модуль Юнга и гиперупругие модели Муни-Ривлина периодонтальной связки / Чижмаков Е. А., Караков К. Г., Муслов С. А. [и др.] // Современные вопросы биомедицины. – 2023. – Т. 7. – № 3. DOI: 10.24412/2588-0500-2023_07_03_43

For citation: Chizhmakov E.A., Karakov K.G., Muslov S.A., Em A.V., Arutyunov S.D. Ligament system of the tooth, differential Young's modulus and hyperelastic Mooney–Rivlin models of the periodontal ligament. *Modern Issues of Biomedicine*, 2023, vol. 7, no. 3. DOI: 10.24412/2588-0500-2023_07_03_43